pauker.

M-Zug2023

Mittelschule Bayern

Lösungen Mathematik Prüfung 2021

Mathematik

10

hutt lernhilfen

Aufgabengruppe I

Aufgabe 1

Scheitelpunktgleichung:

$$\boxed{\begin{array}{l} y = (x - p)^2 + q \\ S\,(p \mid q) \end{array}}$$

$$\boxed{S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}$$

$$\boxed{y = x^2 + px + q}$$

a) p_1: $y = x^2 + 2x - 3$

I. Möglichkeit (quadratische Ergänzung)

$y = x^2 + 2x - 3$

$y = \underbrace{x^2 + 2x + 1^2}_{(x+1)^2} - \underbrace{1^2 - 3}_{4}$

$y = (x + 1)^2 - 4$

$\Rightarrow$ S (-1 | -4)

II. Möglichkeit (Formel)

$p = 2; \quad q = -3$

$S\left(-\frac{2}{2} \mid -3 - \left(\frac{2}{2}\right)^2\right)$

S (-1 | -3 – 1)

S (-1 | -4)

b) p_1: $y = x^2 + 2x - 3$; A (-2 | -3); B (2 | 5)

Einsetzen der Koordinaten von A:

$-3 = (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 3$

$-3 = 4 - 4 - 3$

$-3 = -3 \qquad \Rightarrow$ A liegt auf der Parabel!

Einsetzen der Koordinaten von B:

$5 = 2^2 + 2 \cdot 2 - 3$

$5 = 4 + 4 - 3$

$5 = 5 \qquad \Rightarrow$ B liegt auf der Parabel!

c) Schnittpunkte der Parabel mit der x-Achse (Nullstellen):

$\Rightarrow$ $y = 0$

$x^2 + 2x - 3 = 0 \qquad | + 3$

$x^2 + 2x = 3 \qquad | + 1^2 \qquad$ (quadratisch ergänzen)

$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1$

$(x + 1)^2 = 4 \qquad | \sqrt{}$

$x + 1 = \pm 2 \qquad | - 1$

$x_1 = 2 - 1 = 1 \qquad x_2 = -2 - 1 = -3$

$\Rightarrow$ P (1 | 0); Q (-3 | 0)

d) C (1 | -6) $\in p_2$; D (-4 | -1) $\in p_2$

C eingesetzt:

$-6 = -(1)^2 + 1 \cdot p + q$

$-6 = -1 + p + q \qquad | + 1 - p$

(1) $-5 - p = q$

Normalparabel
nach unten geöffnet:

$$\boxed{y = -x^2 + px + q}$$

D eingesetzt:

$-1 = -(-4)^2 - 4 \cdot p + q$

$-1 = -16 - 4 \cdot p + q$ | + 16 + 4p

(2) $15 + 4p = q$

(1) = (2):

$15 + 4p = -5 - p$ | + p – 15

$5p = -20$ | : 5

(3) $p = -4$

(3) in (1):

$-5 - (-4) = q$

$-5 + 4 = q$

(4) $-1 = q$

$\Rightarrow$ p_2: $y = -x^2 - 4x - 1$

e) Aus der Zeichnung kann man die Koordinaten des Scheitelpunktes von p_3 ablesen.

$\Rightarrow$ S_3 (-2 | 6)

Die Parabel ist nach unten geöffnet.
Einsetzen der Koordinaten des Scheitelpunkts in die Gleichung:

$y = -(x + 2)^2 + 6$

$y = -(x^2 + 4x + 4) + 6$ | Klammer auflösen

$y = -x^2 - 4x - 4 + 6$

$y = -x^2 - 4x + 2$

Scheitelpunktform einer nach unten geöffneten Parabel:

$\boxed{y = -(x - p)^2 + q}$

f) p_4: $y = x^2 - 2x + 1$

g: $y = 2x - 2$

$p_4 \cap g \Rightarrow y_{p_4} = y_g$

$x^2 - 2x + 1 = 2x - 2$ | – 2x – 1

$x^2 - 4x = -3$ | quadratisch ergänzen

$x^2 - 4x + 2^2 = -3 + 2^2$

$(x - 2)^2 = 1$ | $\sqrt{\ }$

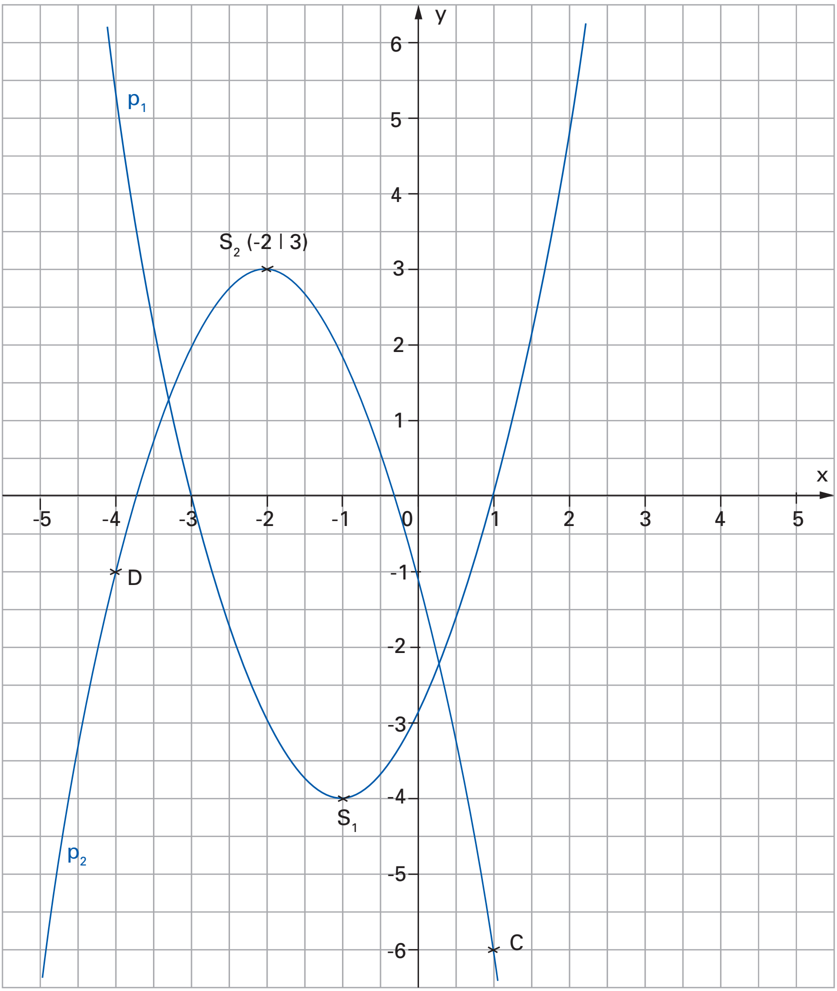
$x - 2 = \pm 1$ | + 2

$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 2 \cdot 3 - 2 = 4$

$x_2 = 1 \Rightarrow y_2 = 2 \cdot 1 - 2 = 0$

$\Rightarrow$ T (3 | 4); U (1 | 0)

g)



S_2 kann als Hilfspunkt berechnet werden.

$y = -x^2 - 4x - 1$	I (-1) ausklammern
$y = -(x^2 + 4x + 1)$	I quadratisch ergänzen
$y = -(x^2 + 4x + 2^2 - 2^2 + 1)$	
$y = -((x + 2)^2 - 3)$	I Klammer auflösen
$y = -(x + 2)^2 + 3$	

$\Rightarrow$ S (-2 I 3)

Aufgabe 2

a) Jährliches Bevölkerungswachstum in %:

$81\,240 = 67\,279 \cdot q^9 \quad | : 67\,279$
$q^9 = 81\,240 : 67\,279$
$q = \sqrt[9]{1{,}20750903}$
$q \approx 1{,}021$

$\Rightarrow \; p = 2{,}1$
Das jährliche Bevölkerungswachstum beträgt 2,1 %.

$W_n = W_0 \cdot q^n$
$\left(q = 1 + \frac{p}{100}\right)$

b) Zahl der 6-jährigen Kinder vor 2 Jahren:

$q = 1 - 0{,}013 = 0{,}987;\; n = 2$
$3245 = W_0 \cdot 0{,}987^2 \quad | : 0{,}987^2$
$W_0 = 3245 : 0{,}987^2 \approx 3331$

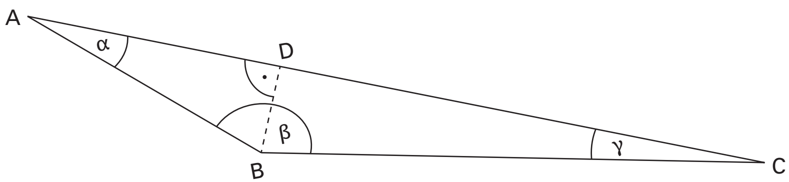
$q = 1 - \frac{p}{100}$

c) Verdoppelungszeitraum in Jahren:

$q = 1{,}0375$
$2 = 1{,}0375^n$
$n = \log_{1{,}0375} 2 = \log 2 : \log 1{,}0375$
$n = 18{,}828 \approx 19$ Jahre

$a^x = b$
$x = \log_a b$

Aufgabe 3



$\overline{AB} = 46$ cm
$\alpha = 28°;\; \beta = 140°$

$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Länge der Strecke [AD] in cm:

$\cos(\alpha) = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$
$\overline{AD} = \cos(28°) \cdot 46$ cm
$\approx 40{,}6$ cm

Länge der Strecke [BD] in cm:

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AD}^2 = (46\text{ cm})^2 - (40{,}6\text{ cm})^2$
$\overline{BD} = \sqrt{2116\text{ cm}^2 - 1648{,}36\text{ cm}^2} \approx 21{,}6$ cm

Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

$\gamma = 180° - 140° - 28° = 12°$

Winkelsumme im Dreieck:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

Länge der Strecke $\overline{DC}$ in cm:

$\tan(\gamma) = \overline{BD} : \overline{DC}$

$\overline{DC} = 21{,}6 \text{ cm} : \tan(12°) \approx 101{,}6 \text{ cm}$

$\boxed{\tan(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}$

$\Rightarrow \overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = 40{,}6 \text{ cm} + 101{,}6 \text{ cm} = 142{,}2 \text{ cm}$

2. Möglichkeit zur Berechnung von $\overline{BD}$:

$\overline{BD} = \overline{AB} \cdot \sin(\alpha)$

$= 46 \text{ cm} \cdot \sin(28°) \approx 21{,}6 \text{ cm}$

$\boxed{\sin(\alpha) = \dfrac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

2. Möglichkeit zur Berechnung von $\overline{CD}$:

$\sphericalangle\, DBA = 180° - 90° - 28° = 62°$

$\sphericalangle\, DBC = 140° - 62° = 78°$

$\overline{CD} = \overline{DB} \cdot \tan(78°) = 21{,}6 \text{ cm} \cdot \tan(78°)$

$\overline{CD} \approx 101{,}6 \text{ cm}$

Winkelsumme im Dreieck:

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Aufgabe 4

$$\frac{2 \cdot x^3 \cdot 6 \cdot y^{-4} \cdot 10 \cdot z^{-6} \cdot x^{-2} \cdot 2 \cdot y^8 \cdot z^2}{3 \cdot y^2 \cdot 10 \cdot x^{-3} \cdot 4 \cdot z^{-4}} =$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot 6 \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{2} \cdot x^3 \cdot x^{-2} \cdot y^{-4} \cdot y^8 \cdot z^{-6} \cdot z^2}{\cancel{3} \cdot \cancel{10} \cdot \cancel{4} \cdot x^{-3} \cdot y^2 \cdot z^{-4}} =$$

$$\frac{2 \cdot x^1 \cdot y^4 \cdot z^{-4}}{x^{-3} \cdot y^2 \cdot z^{-4}} =$$

$$2 \cdot x^4 \cdot y^2$$

Potenzgesetze:

$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n}}$

$\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

Aufgabe 5

a) A (4 I -1); B (6 I 1); A, B $\in g_1$

$m_1 = \dfrac{1 - (-1)}{6 - 4} = \dfrac{2}{2} = 1$

$y = m \cdot x + 1$

B eingesetzt:

$1 = 1 \cdot 6 + t_1 \qquad | -6$

$-5 = t_1$

$\Rightarrow g_1\!: y = x - 5$

$\boxed{y = m \cdot x + t}$

$\boxed{m = \dfrac{y}{x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

b) $g_2 \perp g_3$; $\qquad g_3\!: \dfrac{y}{x} = 1$

$y = x$

$\boxed{\begin{array}{l} g_2 \perp g_3 \\ m_2 = -\dfrac{1}{m_3} \end{array}}$

Funktionsgleichung der Geraden g_2:

$m_3 = 1 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -1$

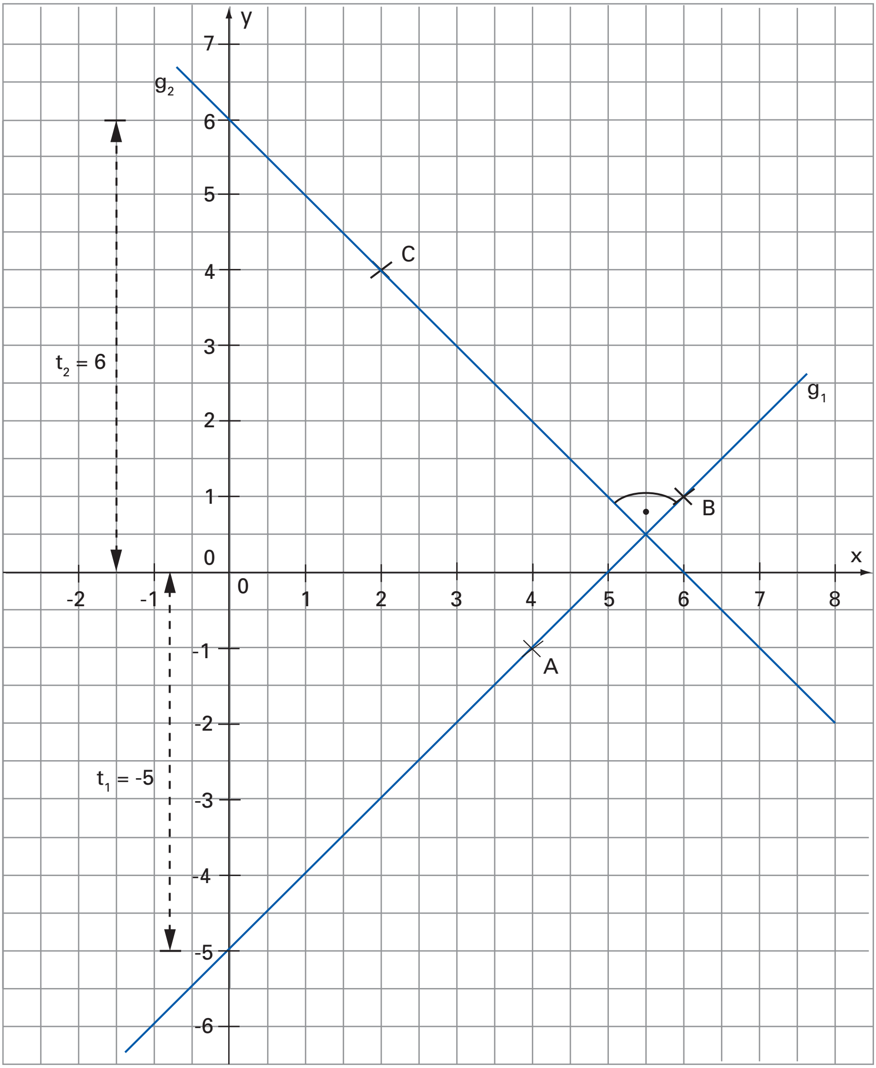
C (2 | 4) eingesetzt:

$\Rightarrow\quad 4 = -1 \cdot 2 + t_2 \qquad | + 2$

$\qquad 6 = t_2$

g_2: $y = -x + 6$

c) Zeichnung:



d) g_4: $y = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ $(m = 0)$
z. B. $y = 8$ oder $y = 3$ oder $y = -1\ldots$

e) g_5: $y = m_5 \cdot x - 9$
$D\,(-3 \mid 3) \in g_5$

Einsetzen der Koordinaten von D in die Geradengleichung:

$$\begin{aligned} 3 &= m_5 \cdot (-3) - 9 && \mid +9 \\ 12 &= -3m_5 && \mid :(-3) \\ -4 &= m_5 \end{aligned}$$

f) Koordinaten des Schnittpunkts S:
$y_6 = y_7$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad 2x - 7 &= -\frac{1}{2}x + 3 && \mid +\frac{1}{2}x + 7 \\ 2{,}5x &= 10 && \mid :2{,}5 \\ x &= 4 \end{aligned}$$

Eingesetzt in g_6:

$y = 2 \cdot 4 - 7 = 1$

$\Rightarrow\;$ S $(4 \mid 1)$

g) g_7: $y = -\frac{1}{2}x + 3$

Berechnung der Nullstelle $(y = 0)$

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{2}x + 3 && \mid +\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{2}x &= 3 && \mid \cdot 2 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

$\Rightarrow\;$ N $(6 \mid 0)$

Aufgabe 6

$$\frac{4}{x} + \frac{1}{3+x} = \frac{7}{x-2} \qquad \mid \cdot \text{HN} \qquad\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0; 2\}$$

Hauptnenner HN: $x \cdot (3 + x) \cdot (x - 2)$

$$\frac{4 \cdot x \cdot (3+x) \cdot (x-2)}{x} + \frac{1 \cdot x \cdot (3+x) \cdot (x-2)}{3+x} = \frac{7 \cdot x \cdot (3+x) \cdot (x-2)}{x-2} \qquad \mid \text{kürzen}$$

$$\begin{aligned} 4 \cdot (3+x) \cdot (x-2) + x\,(x-2) &= 7x \cdot (3+x) && \mid \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ (12 + 4x) \cdot (x-2) + x^2 - 2x &= 21x + 7x^2 && \mid \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ 12x - 24 + 4x^2 - 8x + x^2 - 2x &= 21x + 7x^2 && \mid \text{zusammenfassen} \\ 5x^2 + 2x - 24 &= 21x + 7x^2 && \mid -5x^2 - 2x + 24 \\ 0 &= 2x^2 + 19x + 24 && \mid :2 \\ x^2 + 9{,}5x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

Lösen mit der **Formel**:

$p = 9{,}5;\ q = 12$

$x_{1/2} = -\frac{(9{,}5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{9{,}5}{2}\right)^2 - 12}$

$x_{1/2} = -4{,}75 \pm \sqrt{22{,}5625 - 12}$

$x_{1/2} = -4{,}75 \pm \sqrt{10{,}5625}$

$x_{1/2} = -4{,}75 \pm 3{,}25$

$x_1 = -1{,}5$
$x_2 = -8$

$\Rightarrow\ \mathbb{L} = \{-1{,}5;\ -8\}$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

Aufgabe 7

Volumen der 8 kleineren Kugeln:

$V = 8 \cdot \frac{1}{6} \cdot (4{,}5\ \text{mm})^3 \cdot 3{,}14$

$V = 381{,}51\ \text{mm}^3$

$$\boxed{V_K = \frac{4}{3} r^3 \pi}$$

$$\boxed{V_K = \frac{1}{6} \cdot d^3 \cdot \pi}$$

Volumen der Halbkugel in mm^3:

$V = \frac{1}{6} \cdot (11\ \text{mm})^3 \cdot 3{,}14 : 2 \approx 348{,}28\ \text{mm}^3$

Volumen der neuen Goldkugel:

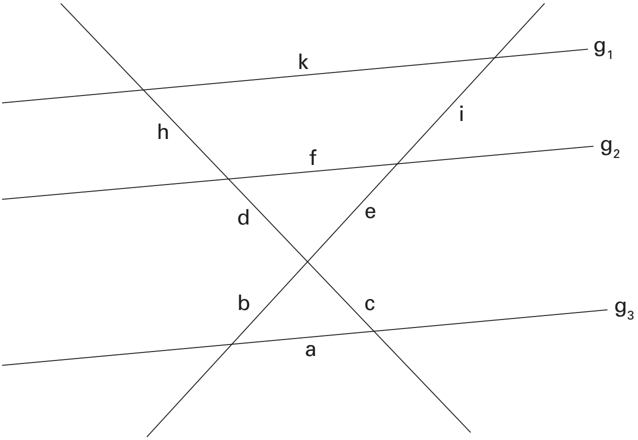
$V = 381{,}51\ \text{mm}^3 - 348{,}28\ \text{mm}^3 = 33{,}23\ \text{mm}^3$

Radius der neuen Kugel:

$r^3 = V \cdot \frac{3}{4} : 3{,}14$

$r = \sqrt[3]{33{,}23\ \text{mm}^3 \cdot \frac{3}{4} : 3{,}14} \approx 2{,}0\ \text{mm}$

Aufgabe 8



(1) $\frac{i+e}{k} = \frac{e}{\boxed{f}}$ (2) $\frac{\boxed{d}}{e} = \frac{c}{\boxed{b}}$ (3) $\frac{a}{k} = \frac{c}{\boxed{d+h}}$

Aufgabe 9

a) (1) $\left(\sqrt{2}a + \boxed{8b}\right)\left(\sqrt{2}a - \boxed{8b}\right) = \boxed{2a^2} - 64b^2$

$(\sqrt{2}a)^2$

$\sqrt{64b^2}$

3. binomische Formel:

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

(2) $\frac{1}{16}a^2b^4 - \boxed{a^2b^2} + \boxed{4a^2} = \left(\boxed{\frac{1}{4}ab^2} - 2a\right)^2$

$(2a)^2$

$\sqrt{\frac{1}{16}a^2b^4}$

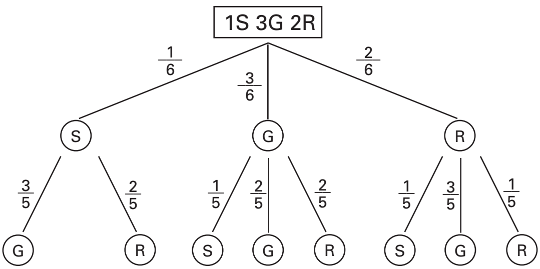
$2 \cdot \frac{1}{4}ab^2 \cdot 2a$

2. binomische Formel:

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Aufgabe 10

a)



b) Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel schwarz ist:

$W = \frac{3}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{30} + \frac{2}{30} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 16{,}7\ \%$

c) Wahrscheinlichste Farbkombination: grün und rot
Begründung:

$\frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{30} = 0{,}4 = 40\ \%$

Aufgabengruppe II

Aufgabe 1

a) Schnittpunkt mit der x-Achse (y = 0)

$0 = -0{,}5x + 3 \quad | + 0{,}5x$

$0{,}5x = 3 \quad | \cdot 2$

$x = 6$

$\Rightarrow$ N (6 I 0)

b)

x	5	-36
y	0,5	21

- Einsetzen des x-Wertes in die Gleichung:

  $y = -0{,}5 \cdot 5 + 3 = -2{,}5 + 3 = 0{,}5$

- Einsetzen des y-Wertes:

  $21 = -0{,}5x + 3 \quad | + 0{,}5x - 21$

  $0{,}5x = 3 - 21 \quad | \cdot 2$

  $x = -36$

c) $g_2 \perp g_1$; B (-2,5 I 0) $\in g_2$

Funktionsgleichung von g_2:

$m_1 = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$

$\Rightarrow y = 2 \cdot x + t_2$

B eingesetzt:

$0 = 2 \cdot (-2{,}5) + t_2 \quad | + 5$

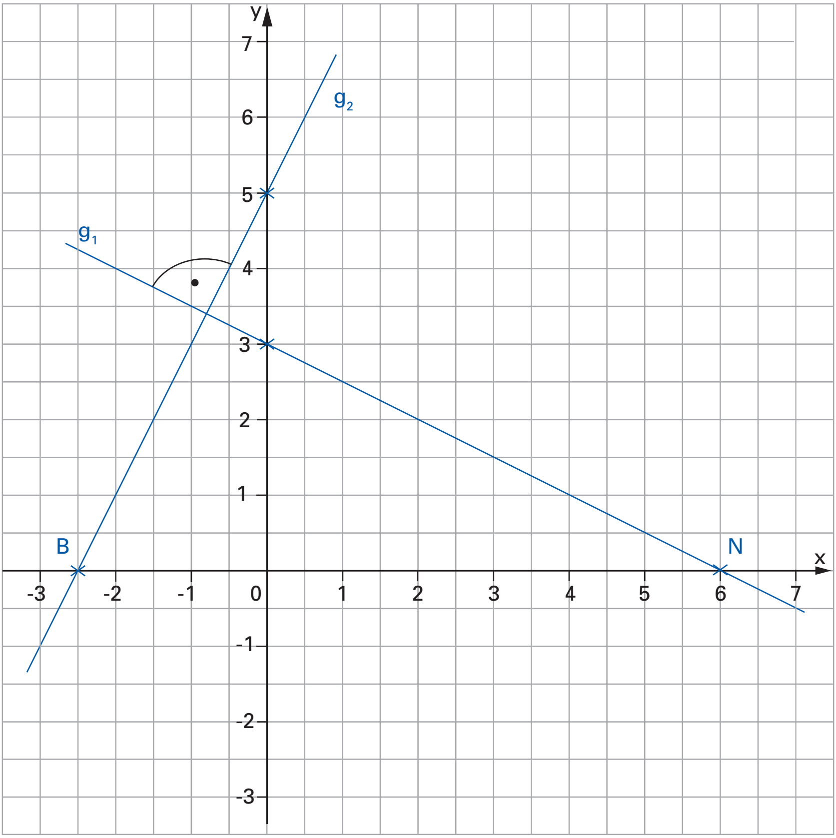
$5 = t_2$

$\Rightarrow g_2$: $y = 2x + 5$

Orthogonale Geraden:

$(g_1 \perp g_2)$
$m_1 = -\frac{1}{m_2}$

d) Zeichnung:



e) C (-1 | -1) ∈ g_3; D (4 | 1) ∈ g_3

$\Rightarrow\ m_3 = \frac{1-(-1)}{4-(-1)} = \frac{2}{5}$

$\Rightarrow\ y = \frac{2}{5}x + t$

D eingesetzt:

$1 = \frac{2}{5} \cdot 4 + t \qquad | -1\frac{3}{5}$

$-\frac{3}{5} = t$

$\Rightarrow\ g_3\text{: } y = \frac{2}{5}x - \frac{3}{5}$

$\boxed{y = m \cdot x + t}$

$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$

f) g_4: $-0{,}5x = -5 - y$ $\quad | + y + 0{,}5x$

$\Rightarrow$ Gleichung umformen:
$y = 0{,}5x - 5$

$g_1 \cap g_4 \rightarrow y_1 = y_4$

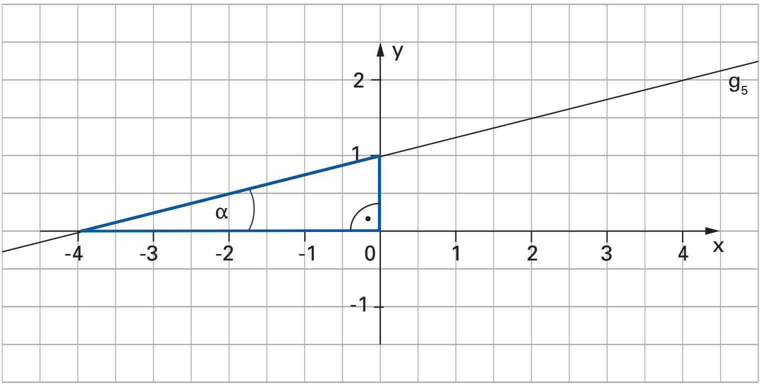
$\Rightarrow$ $0{,}5x - 5 = -0{,}5x + 3$ $\quad | + 0{,}5x + 5$
$x = 8$

In g_4 eingesetzt:

$y = 0{,}5 \cdot 8 - 5 = -1$

$\Rightarrow$ T (8 | -1)

g)



Aus der Zeichnung kann abgelesen werden:

- Achsenabschnitt t = 1
- Steigungsdreieck: $m = \frac{y}{x} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ g_5: $y = \frac{1}{4}x + 1$

$\boxed{m = \frac{y}{x}}$

h) $\tan(\alpha) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 14°$

$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}$

Aufgabe 2

$\frac{60}{x} - \frac{32}{x+1} = \frac{26}{x-2}$ $\quad | \cdot \text{HN}$ $\qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 2\}$

Hauptnenner HN: $x \cdot (x+1) \cdot (x-2)$

$$\frac{60 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x} - \frac{32 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x+1} = \frac{26 \cdot x \cdot (x+1) \cdot (x-2)}{x-2} \quad | \text{ kürzen}$$

$$\begin{aligned}
60 \cdot (x+1) \cdot (x-2) - 32 \cdot x \cdot (x-2) &= 26 \cdot x \cdot (x+1) && | \text{ Klammern ausmultiplizieren} \\
(60x+60) \cdot (x-2) - 32x^2 + 64x &= 26x^2 + 26x \\
60x^2 - 120x + 60x - 120 - 32x^2 + 64x &= 26x^2 + 26x && | \text{ zusammenfassen} \\
28x^2 + 4x - 120 &= 26x^2 + 26x && | -26x^2 - 26x \\
2x^2 - 22x - 120 &= 0 && | :2 \\
x^2 - 11x - 60 &= 0 && | +60 \\
x^2 - 11x &= 60
\end{aligned}$$

Lösung durch **quadratische Ergänzung**:

$$\begin{aligned}
x^2 - 11x + 5{,}5^2 &= 60 + 30{,}25 \\
(x-5{,}5)^2 &= 90{,}25 && | \sqrt{} \\
x - 5{,}5 &= \pm 9{,}5 && | +5{,}5 \\
x_1 &= 9{,}5 + 5{,}5 = 15 \\
x_2 &= -9{,}5 + 5{,}5 = -4
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-4; 15\}$

Aufgabe 3

a) Jährliche Abnahme in Prozent:

$$\begin{aligned}
63\,750 &= 85\,000 \cdot q^{19} \\
q^{19} &= \frac{63\,750}{85\,000} \\
q &= \sqrt[19]{0{,}75} \approx 0{,}985 \\
p &= (1 - 0{,}985) \cdot 100 = 1{,}5\ \%
\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} W_n &= W_0 \cdot q^n \\ q &= 1 - \frac{p}{100} \end{aligned}}$$

n = Anzahl der Beobachtungs-zeiträume

b) Zeitspanne in Jahren:

$$\begin{aligned}
85\,000 &= 67\,800 \cdot 1{,}029^n \\
1{,}029^n &= \frac{85\,000}{67\,800} \\
n &= \log_{1{,}029}(85\,000 : 67\,800) \\
&= \log(85\,000 : 67\,800) : \log 1{,}029 \\
&\approx 8 \text{ Jahre}
\end{aligned}$$

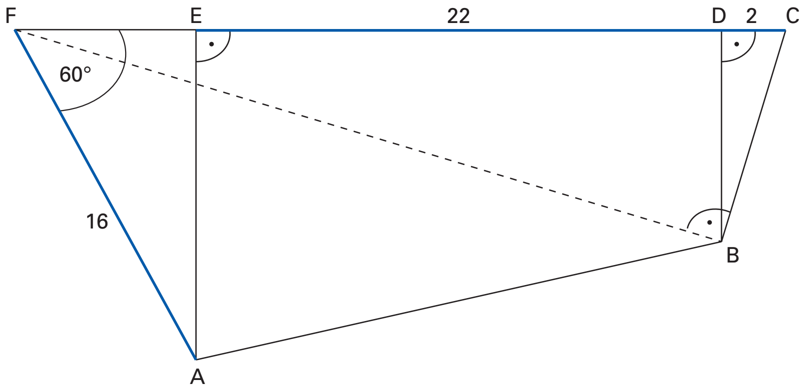
$$\boxed{q = 1 + \frac{p}{100}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a^x &= b \\ x &= \log_a b \end{aligned}}$$

c) Voraussichtliche Mitgliederzahl:

$W_n = 67\,800 \cdot 1{,}033^{11} \approx 96\,902$ $\qquad q = 1 + \frac{3{,}3}{100} = 1{,}033$

Aufgabe 4



$\overline{AF} = 16$ dm; $\overline{ED} = 22$ dm; $\overline{DC} = 2$ dm

a) Länge der Strecke $\overline{AE}$:

$\sin(60°) = \overline{AE} : 16\text{ dm}$

$\overline{AE} = \sin(60°) \cdot 16\text{ dm} \approx 13{,}9\text{ dm}$

$\boxed{\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

Länge der Strecke [EF]:

$\cos(60°) = \overline{EF} : 16\text{ dm}$

$\overline{EF} = \cos(60°) \cdot 16\text{ dm} = 8\text{ dm}$

$\boxed{\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

oder

$\overline{EF}^2 = \overline{AF}^2 - \overline{EA}^2$

$= (16\text{ dm})^2 - (13{,}9\text{ dm})^2$

$\overline{EF} = \sqrt{(16\text{ dm})^2 - (13{,}9\text{ dm})^2} \approx 7{,}9\text{ dm}$

$\approx 8\text{ dm}$

Pythagoras:

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Länge der Strecke [BD]:

$\overline{BD}^2 = (\overline{FE} + \overline{ED}) \cdot \overline{DC}$

$\overline{BD}^2 = (8\text{ dm} + 22\text{ dm}) \cdot 2\text{ dm}$

$\overline{BD} = \sqrt{60\text{ dm}^2} \approx 7{,}7\text{ dm}$

Höhensatz:

$\boxed{h^2 = p \cdot q}$

Flächeninhalt des Trapezes ABDE:

$A_T = \frac{\overline{AE} + \overline{BD}}{2} \cdot \overline{ED} = \frac{13{,}9\text{ dm} + 7{,}7\text{ dm}}{2} \cdot 22\text{ dm}$

$A_T = 237{,}6\text{ dm}^2$

$\boxed{A_T = \frac{a + c}{2} \cdot h_T}$

b) Anwendungsbeispiele für den Kathetensatz:

$\triangle$ FCB : $\overline{BC}^2 = \overline{FC} \cdot \overline{DC}$ oder

$\overline{BF}^2 = \overline{FC} \cdot \overline{FD}$

$\boxed{b^2 = c \cdot q}$ $\boxed{a^2 = c \cdot p}$

Aufgabe 5

a) Funktionsgleichung von p_1:

$y = x^2 + px + q$

A (-2 | -3) $\in p_1$; B (2 | 5) $\in p_1$

A eingesetzt:

$-3 = (-2)^2 + p \cdot (-2) + q$
$-3 = 4 - 2p + q \qquad | -4 + 2p$

(1) $2p - 7 = q$

B eingesetzt:

$5 = 2^2 + 2p + q \qquad | -4 - 2p$

(2) $1 - 2p = q$

(2) = (1):
$2p - 7 = 1 - 2p \qquad | +2p + 7$
$4p = 8 \qquad | :4$

(3) $p = 2$

(3) in (1):
$2 \cdot 2 - 7 = q$
$-3 = q$

$\Rightarrow p_1$: $y = x^2 + 2x - 3$

b) p_2: $y = x^2 - 5x + 2{,}25$

Lösung durch quadratische Ergänzung:

Scheitelpunktform:

$y = (x - p)^2 + q$
S (p | q)

$y = x^2 - 5x + 2{,}5^2 - 2{,}5^2 + 2{,}25$
$y = (x - 2{,}5)^2 - 6{,}25 + 2{,}25$
$y = (x - 2{,}5)^2 - 4$

$\Rightarrow$ S_2 (2,5 | -4)

c) x-Koordinaten der Nullstellen (y = 0):

$0 = x^2 - 5x + 2{,}25$

Lösung mit der Formel:

$p = -5$; $q = 2{,}25$

$$x_{1/2} = -\frac{(-5)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 2{,}25}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$x_{1/2} = 2{,}5 \pm \sqrt{4}$

$x_1 = 2{,}5 + 2 = 4{,}5$
$x_2 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$

d) S_3 (3 I 4)

$y = -(x - 3)^2 + 4$ | Binom berechnen

$y = -(x^2 - 6x + 9) + 4$ | Klammer auflösen

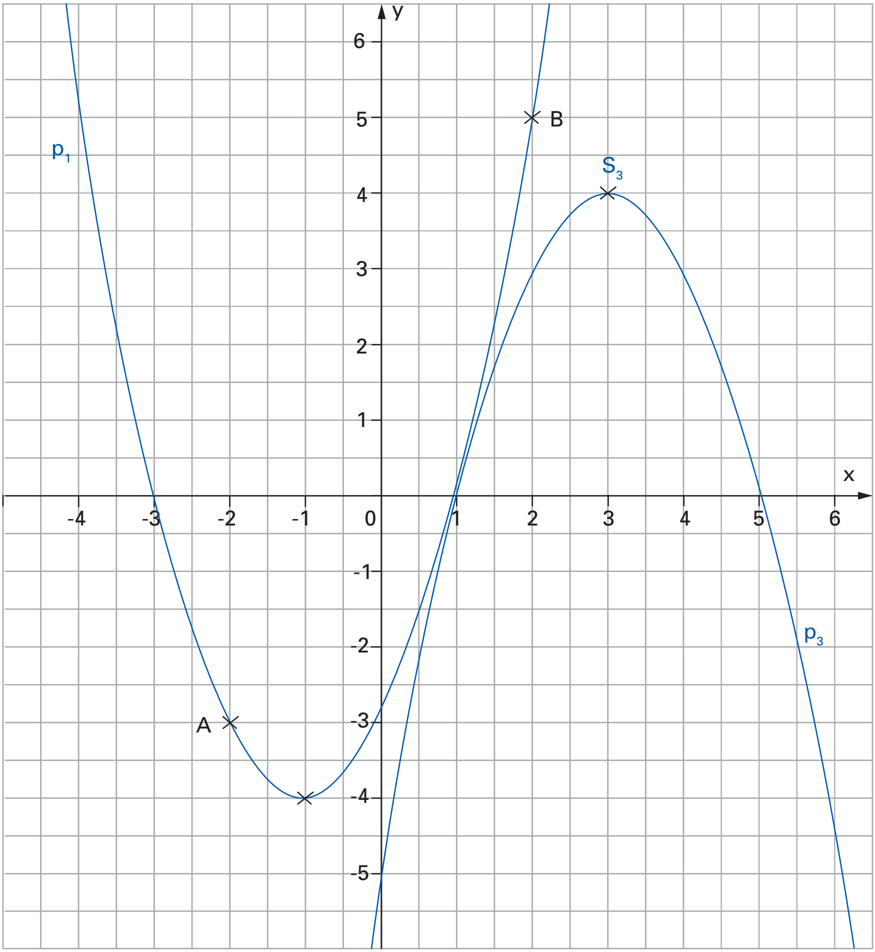
$y = -x^2 + 6x - 9 + 4$

$y = -x^2 + 6x - 5$

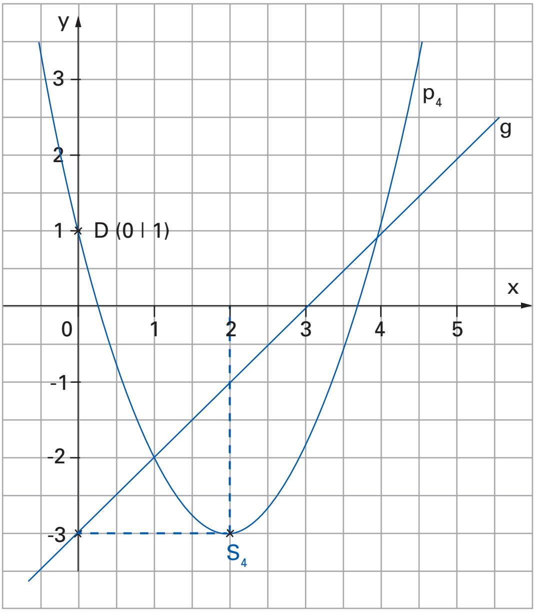
Scheitelpunktform einer nach unten geöffneten Parabel

$\boxed{y = -(x - p)^2 + q}$

e)



f) ▶ Nachweis durch Zeichnung:



D liegt nicht auf g!

▶ Nachweis durch Überlegung:
D liegt nicht auf g, da die Gerade die y-Achse bei (0 I -3) schneidet (Achsenabschnitt).

▶ Nachweis durch Rechnung:

$$\begin{aligned}
g \cap p_4 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^2 - 3 &= x - 3 \\
x^2 - 4x + 4 - 3 &= x - 3 && \mid -x+3 \\
x^2 - 5x + 4 &= 0 \\
x^2 - 5x + 2{,}5^2 + 4 &= 2{,}5^2 \\
(x - 2{,}5)^2 + 4 &= 6{,}25 && \mid -4 \\
(x - 2{,}5)^2 &= 2{,}25 && \mid \sqrt{} \\
x - 2{,}5 &= \pm 1{,}5 && \mid +2{,}5 \\
x_1 &= 1{,}5 + 2{,}5 = 4 && \Rightarrow \quad y_1 = 4 - 3 = 1 \\
x_2 &= -1{,}5 + 2{,}5 = 1 && \Rightarrow \quad y_2 = 1 - 3 = -2
\end{aligned}$$

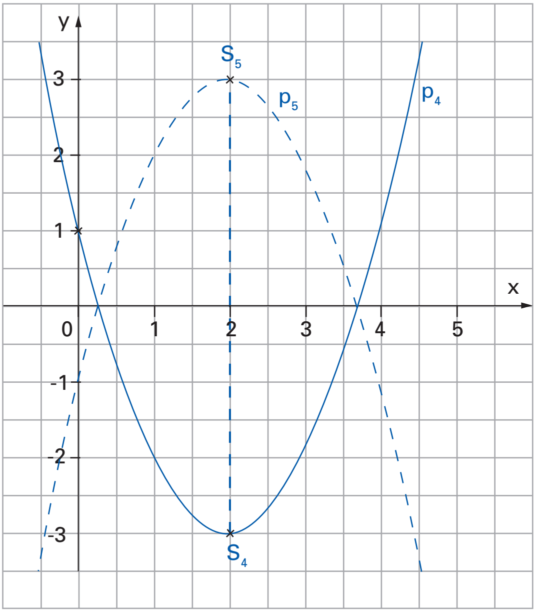
oder

▶ D in g einsetzen
$1 = 0 - 3$
$1 = -3$ falsch
$\Rightarrow$ D $\notin$ g

$\Rightarrow$ Q_1 (4 I 1); Q_2 (1 I -2)

D (0 I 1) ist kein gemeinsamer Schnittpunkt!

g) Veranschaulichung durch Zeichnung:



$\Rightarrow$ S_5 (2 I 3); p_5 nach unten geöffnet

$\Rightarrow$ Scheitelpunktform: $y = -(x - 2)^2 + 3$

Aufgabe 6

a) $25x^6y^2 + \boxed{60x^3yz^4} + 36z^8 = \left(\boxed{5x^3y} + \boxed{6z^4}\right)^2$

$\sqrt{25x^6y^2}$

$\sqrt{36z^8}$

$2 \cdot 5 \cdot x^3 \cdot y \cdot 6 \cdot z^4$

1. Binomische Formel:

$\boxed{a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2}$

b) (I) $\dfrac{0{,}5 \cdot (y^4)^{-2} \cdot 4y^3 \cdot 6y^6}{12y} =$

$\dfrac{0{,}5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot y^{-8} \cdot y^3 \cdot y^6}{12y} =$

$\dfrac{12 \cdot y}{12y} = 1$

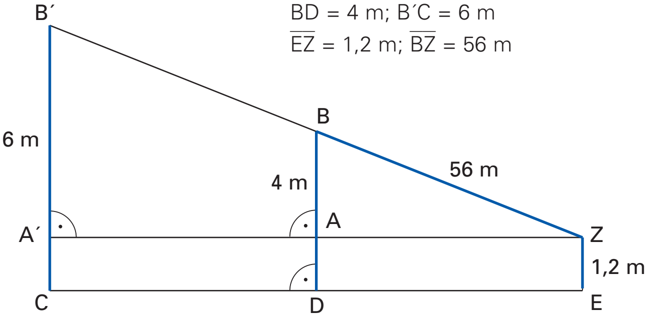
(II) $\dfrac{(y^{12})^{0{,}5}}{\sqrt[4]{y^{16}}} = \dfrac{y^6}{y^4} = y^2$

$\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$

$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m + n}}$

$\boxed{a^m : a^n = a^{m - n}}$

Aufgabe 7



$\overline{BD} = 4\text{ m}$; $\overline{B´C} = 6\text{ m}$
$\overline{EZ} = 1{,}2\text{ m}$; $\overline{BZ} = 56\text{ m}$

a) $\overline{A´B´} = k \cdot \overline{AB}$

$$k = \frac{6\text{ m} - 1{,}2\text{ m}}{4\text{ m} - 1{,}2\text{ m}} = \frac{4{,}8\text{ m}}{2{,}8\text{ m}} \approx 1{,}7$$

$\boxed{\overline{A´B´} \parallel \overline{AB} \Rightarrow \overline{A´B´} = k \cdot \overline{AB}}$

b) Länge der Strecke [BB´]:

$\overline{ZB´} : \overline{ZB} = \overline{A´B´} : \overline{AB}$
$\overline{ZB´} : 56\text{ m} = 4{,}8\text{ m} : 2{,}8\text{ m} \qquad | \cdot 56\text{ m}$
$\overline{ZB´} = 4{,}8\text{ m} : 2{,}8\text{ m} \cdot 56\text{ m} = 96\text{ m}$
$\overline{BB´} = 96\text{ m} - 56\text{ m} = 40\text{ m}$

Aufgabe 8

a) Berechnung der Oberfläche der Halbkugel:

$O = 4 \cdot (30\text{ cm})^2 \cdot 3{,}14 = 11\,304\text{ cm}^2$

$\frac{1}{2}\,O = 5652\text{ cm}^2$

$\boxed{O_{Kugel} = 4r^2 \cdot \pi}$

b) Berechnung des Volumens der Kugel:

$V = \frac{4}{3} \cdot (22\text{ cm})^3 \cdot 3{,}14 \approx 44\,580\text{ cm}^3$

$\boxed{V_{Kugel} = \frac{4}{3}r^3 \cdot \pi}$

Berechnung des Gewichts der Kugel:

$m = 44\,580\text{ cm}^3 \cdot 2{,}8\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 124\,824\text{ g}$

$m \approx 125\text{ kg}$

$\boxed{m = D \cdot V}$

c) Volumen des verdrängten Wassers:

$V = (7{,}5\ \text{cm})^2 \cdot 3{,}14 \cdot 5\ \text{cm} = 883{,}125\ \text{cm}^3$

$V_{\text{Zyl.}} = r^2\pi \cdot h$

Durchmesser der Kugel:

$883{,}125\ \text{cm}^3 = \frac{1}{6} \cdot d^3 \cdot 3{,}14$

$d^3 = 883{,}125\ \text{cm}^3 \cdot 6 : 3{,}14$

$d = \sqrt[3]{1687{,}5\ \text{cm}^3} \approx 11{,}9\ \text{cm}$

$V_{\text{Kugel}} = \frac{1}{6} \cdot d^3 \cdot \pi$

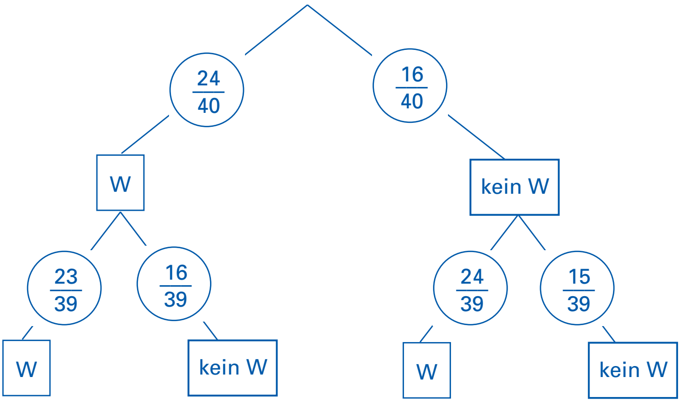
Aufgabe 9

a) Anzahl der Kekse mit einem Glückssymbol:
$40 - 24 - 12 = 4$

Wahrscheinlichkeit für ein „G“:

$W = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$

b)



Wahrscheinlichkeit für ein „W“:

$W = \frac{24}{40} + \frac{16}{40} \cdot \frac{24}{39} = \frac{936}{1560} + \frac{384}{1560} = \frac{1320}{1560} = \frac{132}{156} = \frac{11}{13}$

c) Anzahl der möglichen Reihenfolgen:

$12! = 479\,001\,600$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$