pauker.

M-Zug2023

Mittelschule Bayern

Lösungen Mathematik Prüfung 2020

Mathematik

hutt lernhilfen

10

Aufgabengruppe I

Aufgabe 1

a) Bestimmung des Scheitelpunkts aus der Skizze: S (-2 I 3)

Einsetzen der Koordinaten in die Scheitelpunktgleichung:

$y = -(x - (-2))^2 + 3$
$y = -(x + 2)^2 + 3$
$y = -x^2 - 4x - 4 + 3$
$y = -x^2 - 4x - 1$

$\boxed{y = (x - p)^2 + q}$

Bei nach unten geöffneter Parabel:

$\boxed{y = -(x - p)^2 + q}$

b) p_2: $y = x^2 + 4x + 1{,}5$; A (-1 I 2), B (-3 I -1,5)

Einsetzen der Koordinaten von A:
$2 = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 1{,}5$
$2 = 1 - 4 + 1{,}5$
$2 \neq -1{,}5$ $\Rightarrow$ A liegt nicht auf der Parabel!

Einsetzen der Koordinaten von B:
$-1{,}5 = (-3)^2 + 4 \cdot (-3) + 1{,}5$
$-1{,}5 = 9 - 12 + 1{,}5$
$-1{,}5 = -1{,}5$ $\Rightarrow$ B liegt auf der Parabel!

c) p_2: $y = x^2 + 4x + 1{,}5$

I. Möglichkeit (quadratische Ergänzung)

$y = x^2 + 4x + 1{,}5$
$y = \underbrace{x^2 + 4x + 2^2}_{} \underbrace{- 2^2 + 1{,}5}_{}$
$y = (x + 2)^2 - 2{,}5$
$\Rightarrow S_2$ (-2 I -2,5)

Scheitelpunktgleichung:

$\boxed{\begin{array}{l} y = (x - p)^2 + q \\ S\ (p \mid q) \end{array}}$

II. Möglichkeit (Formel)

$p = 4; \quad q = 1{,}5$
$S_2\left(-\frac{4}{2} \mid 1{,}5 - \left(\frac{4}{2}\right)^2\right)$
S_2 (-2 I 1,5 – 4)
S_2 (-2 I -2,5)

$\boxed{S\left(-\frac{p}{2} \mid q - \left(\frac{p}{2}\right)^2\right)}$

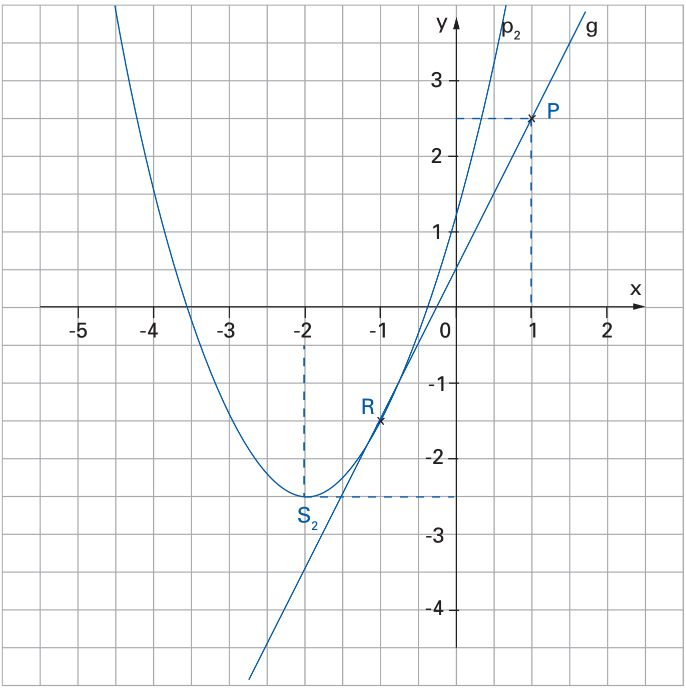
d) Koordinaten des Schnittpunkts R:

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + 1{,}5 &= 2x + 0{,}5 && \mid -2x - 1{,}5 \\ x^2 + 2x &= -1 && \mid +1 \\ x^2 + 2x + 1 &= 0 && \\ (x + 1)^2 &= 0 && \mid \sqrt{\ } \\ x + 1 &= 0 && \mid -1 \\ x &= -1 && \end{aligned}$$

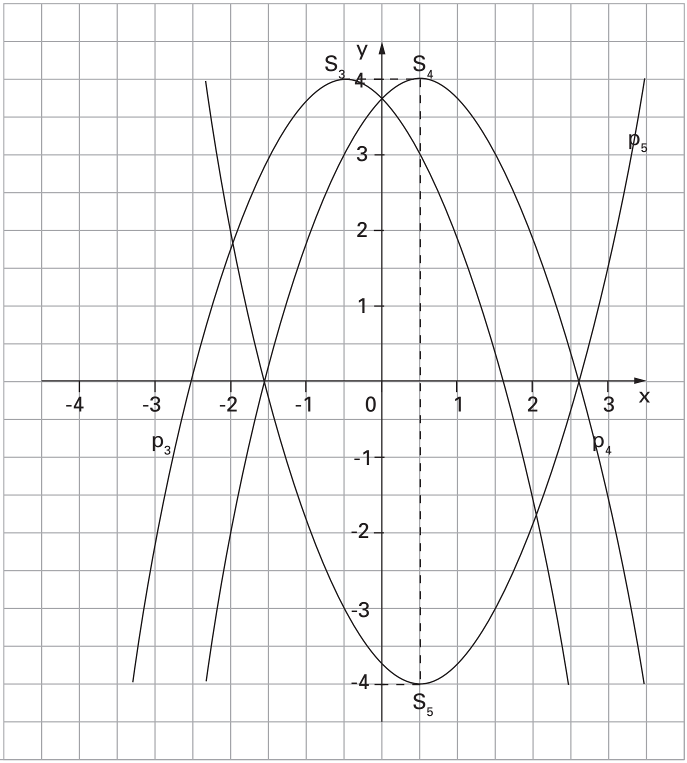
Einsetzen von x in eine Gleichung:
$y = 2 \cdot (-1) + 0{,}5 = -2 + 0{,}5 = -1{,}5$
$\longrightarrow$ R (-1 | -1,5)

e) S_2 (-2 | -2,5)
R (-1 | -1,5)

Die Gerade schneidet die y-Achse im Achsenabschnitt $t = 0{,}5$
oder:
Einen zweiten Geradenpunkt findet man, indem man für einen x-Wert den dazugehörigen y-Wert berechnet.
z. B. $x = 1$
$\longrightarrow$ $y = 2 \cdot 1 + 0{,}5$
$y = 2{,}5$
$\longrightarrow$ P (1 | 2,5)



f) Hilfsskizze:



S_3 (-0,5 | 4) ⟶ S_4 (0,5 | 4) ⟶ S_5 (0,5 | -4)

⟶ Die Parabel p_5 ist jetzt **nach oben** geöffnet.

Scheitelpunktgleichung von p_5:

p = 0,5; q = -4

$y = (x - 0{,}5)^2 - 4$

Scheitelpunktgleichung:

$y = (x - p)^2 + q$
S (p | q)

Aufgabe 2

a) Restmenge Kobalt nach 13 Jahren:

t = 13 Jahre : 5 = 2,6
$N_t = 3{,}675 \text{ kg} \cdot 0{,}5^{2,6}$
$N_t \approx 0{,}61 \text{ kg}$

$N_t = N_0 \cdot 0{,}5^t$

N_0 = ursprüngl. Menge
0,5 = Abnahmefaktor
t = Anzahl d. Halbwertszeiten
N_t = Endmenge

b) Zerfall in Jahren:

$0{,}1\ \text{kg} = 3{,}675\ \text{kg} \cdot 0{,}5^t \qquad | : 3{,}675\ \text{kg}$
$0{,}5^t = 0{,}1\ \text{kg} : 3{,}675\ \text{kg}$
$t = \log 0{,}0272 : \log 0{,}5 \approx 5{,}2$

Bestimmung d. Exponenten:

$a^x = b \longrightarrow x = \log_a b$
$\log_a b = \log b : \log a$

Berechnung der Jahre:

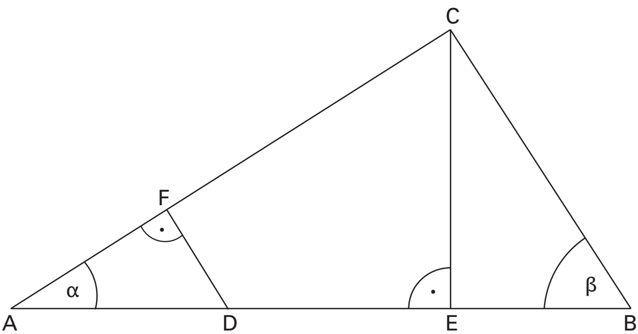
$5{,}2 = \text{Anzahl der Jahre} : \text{HWZ}$
Anzahl der Jahre $= 5{,}2 \cdot 5 =$ 26 Jahre

$t = \text{Anzahl der Jahre} : \text{HWZ}$

c) Berechnung der Ausgangsmenge:

$0{,}742\ \text{kg} = N_0 \cdot 0{,}5^{7{,}6} \qquad (t = 38 : 5 = 7{,}6)$
$N_0 = 0{,}742\ \text{kg} : 0{,}00515 \approx$ 144 kg

Aufgabe 3



$\overline{AF} = 4\ \text{cm}$
$\overline{AD} = 5\ \text{cm}$

$\overline{DF} : \overline{BC} = 1 : 3$
$\overline{DF} \parallel \overline{BC}$

Berechnung von $\measuredangle\ \alpha$:

$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$
$\alpha \approx 37°$

$\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$

Berechnung von $\overline{DF}$:

$\overline{AF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{AD}^2 \qquad | - \overline{AF}^2$
$\overline{DF}^2 = \overline{AD}^2 - \overline{AF}^2$
$\overline{DF}^2 = 25\ \text{cm}^2 - 16\ \text{cm}^2 \qquad | \sqrt{}$
$\overline{DF} = \sqrt{9\ \text{cm}^2}$
$\overline{DF} = 3\ \text{cm}$

Pythagoras:

$a^2 + b^2 = c^2$

Bestimmung von $\overline{BC}$:

$\overline{DF} : \overline{BC} = 1 : 3$

$3\text{ cm} : \overline{BC} = 1 : 3 \qquad | \cdot 3 \qquad | \cdot \overline{BC}$

$3\text{ cm} \cdot 3 = \overline{BC}$

$\overline{BC} = 9\text{ cm}$

Berechnung von $\sphericalangle\, \beta$:

$\overline{DF} \parallel \overline{BC} \Rightarrow \sphericalangle\, AFD = \sphericalangle\, ACB = 90°$

$\sphericalangle\, \beta = 180° - 90° - 37° = 53°$

Winkelsumme im Dreieck:

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°}$

Berechnung von $\overline{CE}$:

$\sin \beta = \overline{CE} : \overline{BC}$

$\sin 53° = \overline{CE} : 9\text{ cm} \qquad | \cdot 9\text{ cm}$

$\overline{CE} = \sin 53° \cdot 9\text{ cm} \approx 7{,}2\text{ cm}$

$\boxed{\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

Weitere Lösungsmöglichkeiten:

Berechnung von $\overline{AB}$: (Strahlensatz an parallelen Geraden)

$\overline{AB} : \overline{AD} = 3 : 1 \qquad | \cdot \overline{AD}$

$\overline{AB} = \frac{3}{1} \cdot 5\text{ cm} = 15\text{ cm}$

Berechnung von $\overline{AC}$: (Strahlensatz)

$\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{AC} : \overline{AF}$

$3 : 1 = \overline{AC} : 4\text{ cm} \qquad | \cdot 4\text{ cm}$

$\overline{AC} = \frac{3}{1} \cdot 4\text{ cm} = 12\text{ cm}$

Berechnung von $\overline{BC}$: (Pythagoras)

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$

$\overline{BC}^2 = (15\text{ cm})^2 - (12\text{ cm})^2 \qquad | \sqrt{\ }$

$\overline{BC} = \sqrt{81\text{ cm}^2}$

$\overline{BC} = 9\text{ cm}$

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Bestimmung von $\sphericalangle\, \beta$:

$\sin \beta = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{15} = 0{,}8$

$\Rightarrow \quad \beta \approx 53°$

oder:

$\cos \beta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$

$\cos \beta = \frac{9}{15} = 0{,}6$

$\Rightarrow \quad \beta \approx 53°$

$\boxed{\sin \beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

$\boxed{\cos \beta = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$

Berechnung von $\overline{CE}$ siehe vorige Seite

Aufgabe 4

$$\frac{2 \cdot x^5 \cdot 0{,}5 \cdot y^{-3} \cdot 4x^3 \cdot 2 \cdot y}{8 \cdot y^{-2} \cdot x^7} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{x}} =$$

$$\frac{\cancel{2} \cdot 0{,}5 \cdot \cancel{4} \cdot 2 \cdot x^5 \cdot x^3 \cdot y^{-3} \cdot y}{\cancel{8} \cdot y^{-2} \cdot x^7} + x^{\frac{3}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{2}} =$$

$$\frac{1 \cdot \cancel{x^3} \cdot \cancel{y^{-2}}}{\cancel{y^{-2}} \cdot x^7} + x^{\frac{2}{2}} =$$

$$x^8 \cdot x^{-7} + x^1 =$$

$$x + x = 2x$$

$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$

$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

$\boxed{\frac{1}{a^{-n}} = a^n}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{a}} = a^{-\frac{1}{2}}}$

$\boxed{a^0 = 1}$

Aufgabe 5

a) Bestimmung der Funktionsgleichung von g_1:
Berechnung des Steigungsfaktors m:

C (6 | 2); D (-3 | -1)

$m = \frac{-1 - 2}{-3 - 6} = \frac{-3}{-9} = \frac{1}{3}$

Bestimmung des Achsenabschnitts t:

- Einsetzen von m in die Gleichung:

  $y = \frac{1}{3} x + t$

- Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (hier C):

  $2 = \frac{1}{3} \cdot 6 + t$

- Auflösen nach t:

  $t = 2 - \frac{6}{3} = 2 - 2 = 0$

Gleichung von g_1: $y = \frac{1}{3} x$

$\boxed{y = m \cdot x + t}$

$\boxed{m = \frac{y}{x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

Prüfungen

b) g_2: $y = x$; $g_3 \perp g_2$; $B\,(11 \mid -23) \in g_3$

Funktionsgleichung von g_3:
$m_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad m_3 = -1$
$y = -1 \cdot x + t$

$g_1 \perp g_2$
$\Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1}$

Koordinaten von B eingesetzt:
$-23 = (-1) \cdot 11 + t \qquad \mid +11$
$t = -12$

$\Rightarrow$ g_3: $y = -x - 12$

c) g_2: $y = x$ $(m = 1;\ t = 0)$
g_4: $y = m \cdot x + t$
$\Rightarrow m_4 = m_2 = 1$
$\Rightarrow$ damit g_4 nicht auf g_2 liegt, muss gelten:
$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$g_1 \parallel g_2 \Rightarrow m_1 = m_2$

z. B. g_4: $y = x - 1{,}5$
oder $y = x + 2$
⋮

d) $A\,(4 \mid -1) \in g_5$
g_5: $y = m_5 \cdot x - 4$
Einsetzen der Koordinaten von A in die Gleichung:
$-1 = m_5 \cdot 4 - 4 \qquad \mid +4$
$3 = m_5 \cdot 4 \qquad \mid :4$
$\frac{3}{4} = m_5 \quad \Rightarrow \quad m_5 = 0{,}75$

e) g_6: $y = x - 2{,}5$; g_7: $2x = 3{,}5 - y$

Umformen von g_7:
$2x = 3{,}5 - y \qquad \mid -2x + y$
$y = -2x + 3{,}5$

Gleichsetzen von g_6 und g_7:
$x - 2{,}5 = -2x + 3{,}5 \qquad \mid +2x + 2{,}5$
$3x = 6 \qquad \mid :3$
$x = 2$

Einsetzen von x in eine der Geradengleichungen (hier in g_6):
$y = 2 - 2{,}5 = -0{,}5$

$\Rightarrow$ $S\,(2 \mid -0{,}5)$

f) g_7: $y = -2x + 3{,}5$
Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle) wenn $y = 0$
$0 = -2x + 3{,}5 \qquad \mid +2x$
$2x = 3{,}5 \qquad \mid :2$
$x = 1{,}75$

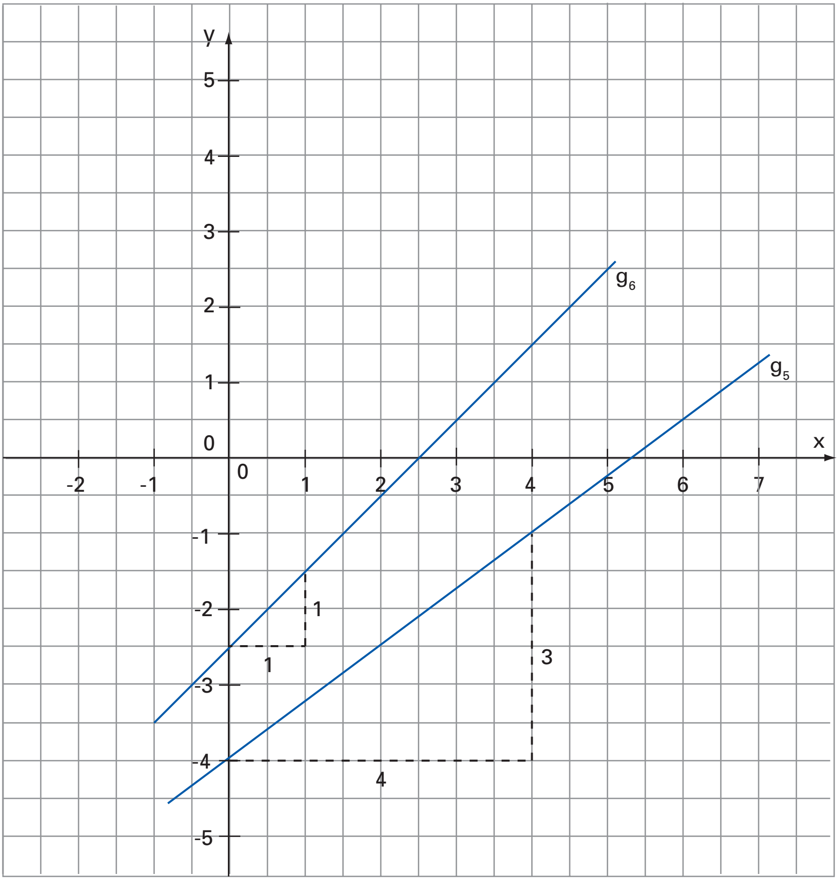
$\Rightarrow$ $N\,(1{,}75 \mid 0)$

Prüfungen

g) g_5: $y = 0{,}75x - 4$; g_6: $y = x - 2{,}5$

$m = \frac{3}{4} = \frac{y}{x}$ $\qquad$ $m = \frac{1}{1}$

$t = -4$ $\qquad$ $t = -2{,}5$



Aufgabe 6

$$\frac{-x}{x+3} + 2 = 1 - \frac{3x}{4 \cdot (x-2)}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3; 2\}$

$(x + 3 = 0$

$x = -3$

$4 \cdot (x - 2) = 0$

$x = 2)$

Multiplizieren der Gleichung mit dem Hauptnenner $(x + 3) \cdot 4 \cdot (x - 2)$:

$$\begin{aligned}
-x \cdot 4 \cdot (x-2) + 2 \cdot (x+3) \cdot 4 \cdot (x-2) &= (x+3) \cdot 4 \cdot (x-2) - 3x \cdot (x+3) \\
-4x^2 + 8x + 8 \cdot (x^2 - 2x + 3x - 6) &= 4 \cdot (x^2 - 2x + 3x - 6) - 3x^2 - 9x \\
-4x^2 + 8x + 8x^2 - 16x + 24x - 48 &= 4x^2 - 8x + 12x - 24 - 3x^2 - 9x \\
4x^2 + 16x - 48 &= x^2 - 5x - 24 \qquad | - x^2 + 5x + 24 \\
3x^2 + 21x - 24 &= 0 \qquad | : 3 \\
x^2 + 7x - 8 &= 0
\end{aligned}$$

Formel: $p = 7$; $q = -8$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

$x_{1/2} = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 - (-8)}$

$x_1 = -3{,}5 + \sqrt{20{,}25} = -3{,}5 + 4{,}5 = 1$

$x_2 = -3{,}5 - 4{,}5 = -8$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{1; -8\}$

Aufgabe 7

Volumen der großen Kugel:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} r^3 \pi}$$

$V = \frac{4}{3} \cdot (20\ mm)^3 \cdot 3{,}14 = 33\,493{,}33\ mm^3$

Volumen einer kleinen Kugel:

$33\,493{,}33\ mm^3 : 6 \approx 5582\ mm^3$

Radius einer kleinen Kugel:

$r^3 = V : \pi : \frac{4}{3}$

$r = \sqrt[3]{5582\ mm^3 : 3{,}14 \cdot 0{,}75} \approx 11\ mm$

Oberfläche einer großen Kugel:

$$\boxed{O = d^2 \cdot \pi}$$

$O = (40\ mm)^2 \cdot 3{,}14 = 5024\ mm^2$

Oberfläche einer kleinen Kugel:

$O = (22\ mm)^2 \cdot 3{,}14 = 1519{,}76\ mm^2$

$\approx 1520\ mm^2$

Oberfläche von 6 kleinen Kugeln:
$O = 1520\ \text{mm}^2 \cdot 6 = 9120\ \text{mm}^2$

$\Rightarrow\ 9120\ \text{mm}^2 > 5024\ \text{mm}^2$
$\Rightarrow\ 6 \cdot O_{\text{kl. K.}} > O_{\text{gr. K.}}$

Aufgabe 8

a) (1) $\overline{ZA} : \overline{ZC} = \overline{ZD} : \overline{ZF}$ $\Rightarrow$ richtig
(2) $\overline{BZ} : \overline{AZ} \neq \overline{FZ} : \overline{EZ}$
(3) $\overline{FC} : \overline{ZC} \neq \overline{EB} : \overline{AB}$
(4) $\overline{ZD} : \overline{DA} = \overline{ZE} : \overline{EB}$ $\Rightarrow$ richtig

$\Rightarrow$ Richtige Lösungen: (1) und (4)

b) $\overline{ZC} = 21\ \text{cm};\ \overline{BC} = 7\ \text{cm};\ \overline{EB} = 8\ \text{cm}$

$$\overline{ZC} : \overline{FC} = \overline{ZB} : \overline{EB}$$
$$21\ \text{cm} : \overline{FC} = (21\ \text{cm} - 7\ \text{cm}) : 8\ \text{cm}$$
$$\frac{21\ \text{cm}}{\overline{FC}} = \frac{14\ \text{cm}}{8\ \text{cm}} \qquad | \cdot \overline{FC}$$
$$21\ \text{cm} = 1{,}75 \cdot \overline{FC} \qquad | : 1{,}75$$
$$\overline{FC} = 12\ \text{cm}$$

Aufgabe 9

a) (1) $$\left(2a - \boxed{2b^8}\right)^2 = \boxed{4a^2} - \boxed{8ab^8} + 4b^{16}$$

$$\sqrt{4b^{16}} = 2b^8$$
$$(2a)^2 = 4a^2$$
$$2 \cdot 2a \cdot 2b^8 = 8ab^8$$

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

(2) $$\left(\frac{1}{5}c^3 + \boxed{\frac{2}{9}d^2}\right) \cdot \left(\frac{1}{5}c^3 - \boxed{\frac{2}{9}d^2}\right) = \boxed{\frac{1}{25}c^6} - \frac{4}{81}d^4$$

$$\sqrt{\frac{4}{81}d^4} = \frac{2}{9}d^2$$
$$\left(\frac{1}{5}c^3\right)^2 = \frac{1}{25}c^6$$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

b) (x + ■) · (x − ◆) = 0
x + ■ = 0 oder x − ◆ = 0
mit $\mathbb{L} = \{-4; 3\}$
$\Rightarrow$ (x + 4) · (x − 3) = 0

Ein Produkt ist dann 0, wenn einer der beiden Faktoren 0 ist.

Probe:
$(x + 4)(x - 3) = 0$
$x^2 - 3x + 4x - 12 = 0 \quad | + 12$
$x^2 + x = 12 \quad | + 0{,}5^2$
$(x + 0{,}5)^2 = 12{,}25 \quad | \sqrt{}$
$x + 0{,}5 = \pm 3{,}5 \quad | - 0{,}5$
$x_1 = 3{,}5 - 0{,}5 = 3$
$x_2 = -3{,}5 - 0{,}5 = -4 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{-4; 3\}$

Aufgabe 10

a) Kombinationsmöglichkeiten:
$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

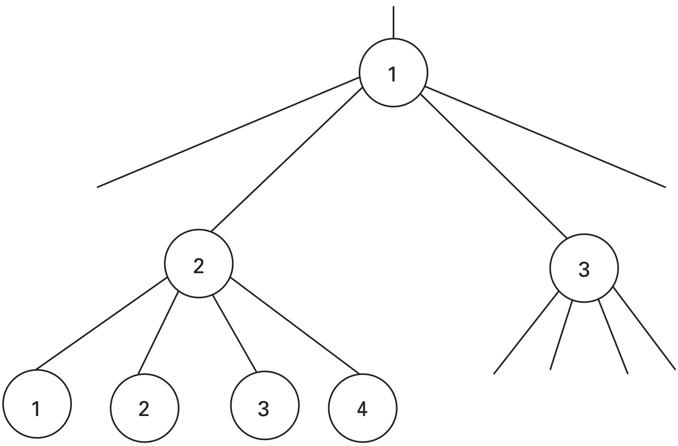
b) Ergebnismenge:
$$M = \left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{2}{1}; \frac{2}{3}; \frac{2}{4}; \frac{3}{1}; \frac{3}{2}; \frac{3}{4}; \frac{4}{1}; \frac{4}{2}; \frac{4}{3}\right\}$$

Wahrscheinlichkeit für den Wert des Bruches 0,5:

Brüche mit dem Wert 0,5: $\frac{1}{2}; \frac{2}{4}$

Wahrscheinlichkeit $P(0{,}5) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \triangleq 16{,}67\,\%$

c)



Die jeweils zuerst gezogene Kugel wurde wieder zurückgelegt, da zum Beispiel

- die Kugel mit der Nummer 1 in einem Pfad zweimal vorkommt.
- von jeder Ziffer vier Pfade abgehen.
- die Zahl 1 ein zweites Mal gezogen werden kann.
- auch beim 3. Zug vier Äste übrig bleiben.

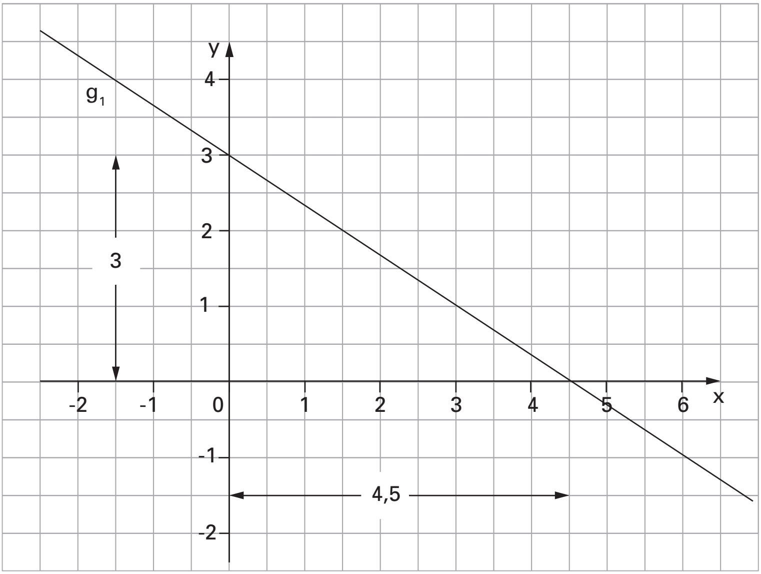
Aufgabengruppe II

Aufgabe 1

a) Aus der Skizze kann man ablesen:

Geradengleichung:

$\boxed{y = m \cdot x + t}$



- Die Gerade ist fallend $\Rightarrow$ $m < 0$
- Steigungsdreieck: $m = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4{,}5} = -\frac{2}{3}$
- Achsenabschnitt $t = 3$

$\Rightarrow g_1\text{: } y = -\frac{2}{3}x + 3$

b) A (6 | 3) und B (-2 | 5) $\in g_2$

Bestimmung von m:

$\boxed{m = \frac{y}{x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

$m = \frac{5 - 3}{-2 - 6} = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4}$

$\Rightarrow\ y = -\frac{1}{4}x + t$

Bestimmung von t durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes (hier A) in die Geradengleichung:

$3 = -\frac{1}{4} \cdot 6 + t$

$3 = -\frac{3}{2} + t \qquad | + \frac{3}{2}$

$4\frac{1}{2} = t$

$\Rightarrow$ g_2: $y = -\frac{1}{4}x + 4{,}5$

c) Schnittpunkt zweier Geraden g_3 und g_4 $\Rightarrow$ $y_3 = y_4$

$-2x + 6 = 0{,}5x - 1{,}5 \qquad | + 2x + 1{,}5$

$7{,}5 = 2{,}5x \qquad | : 2{,}5$

$x = 3$

Einsetzen von x in eine Geradengleichung (hier g_3):

$y = -2 \cdot 3 + 6 = -6 + 6 = 0$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt T (3 | 0)

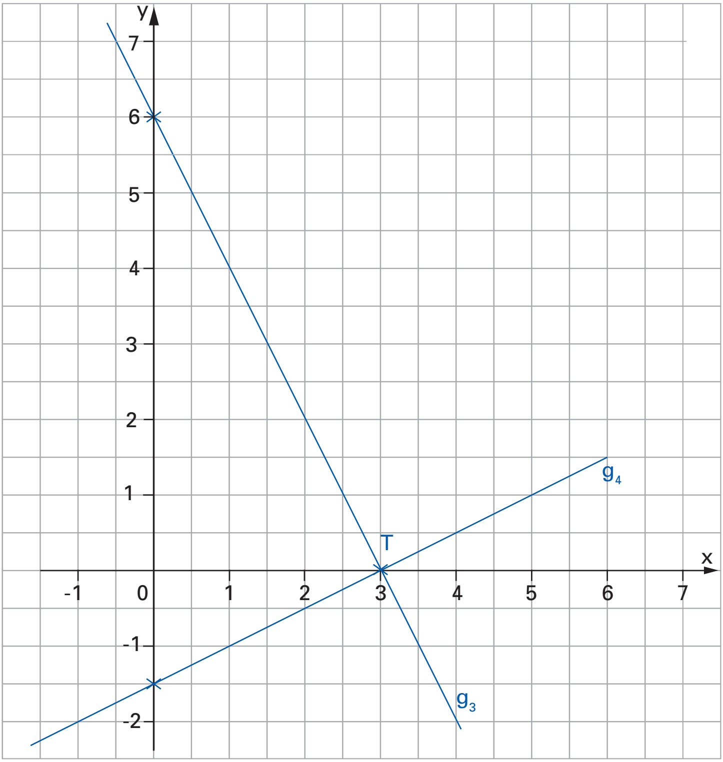
d) Einsetzen der Koordinaten von P (7,25 | 11,75) in die Geradengleichung g_3:

$11{,}75 = -2 \cdot 7{,}25 + 6$

$11{,}75 = -14{,}5 + 6$

$11{,}75 \neq -8{,}5 \quad \Rightarrow$ P liegt nicht auf g_3.

e) Einzeichnen der beiden Achsenabschnitte und des gemeinsamen Schnittpunkts + Verbindung der Punkte.



f) g_5: $0 = -y - 4x + 0{,}5 \qquad | + y$

$y = -4x + 0{,}5$

Schnittpunkt mit der x-Achse = Nullstelle (y = 0):

$0 = -4x + 0{,}5 \qquad | + 4x$

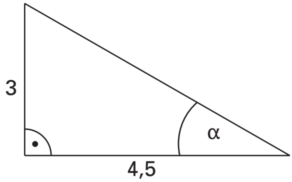
$4x = 0{,}5 \qquad | : 4$

$x = \frac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{8} \mid 0\right)$

g)

x	1	2	-1	…
y	-3,5	-7,5	4,5	…

h)



$\tan \alpha = \frac{3}{4,5}$

$\alpha \approx 34°$

$\boxed{\tan \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}}$

Aufgabe 2

$$\frac{8x + 7}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{9}{x + 2} - \frac{2x}{x + 1}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\}$

Auflösung einer Bruchgleichung durch Multiplikation mit dem Hauptnenner (x + 1) (x + 2):

$$8x + 7 = 9(x + 1) - 2x(x + 2)$$
$$8x + 7 = 9x + 9 - 2x^2 - 4x$$
$$8x + 7 = -2x^2 + 5x + 9 \qquad | + 2x^2 - 5x - 9$$
$$2x^2 + 3x - 2 = 0 \qquad | : 2$$
$$x^2 + 1,5x - 1 = 0$$

Lösung mit der Formel:

$p = 1,5$; $q = -1$

$$x_{1/2} = -\frac{1,5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1,5}{2}\right)^2 - (-1)} = -0,75 \pm \sqrt{0,5625 + 1}$$

$x_1 = -0,75 + 1,25 = 0,5$

$x_2 = -0,75 - 1,25 = -2 \quad \Rightarrow$ nicht definiert!!

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{0,5\}$

$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$

Aufgabe 3

a) $W_n = 50\,000\,€ \cdot 0,91^2 \cdot 0,92^4$

$\approx 29\,662\,€$ (Wert des Wohnmobils nach 6 Jahren)

b) $19\,500\,€ = 45\,000\,€ \cdot q^{12} \qquad | : 45\,000\,€$

$$q^{12} = \frac{19\,500\,€}{45\,000\,€} \qquad | \sqrt[12]{}$$

$$q = \sqrt[12]{0,43} \approx 0,933$$

$\Rightarrow p \approx 6,7\%$ (Wertverlust des Wohnmobils pro Jahr)

c) $9750\,€ = 19\,500\,€ \cdot \left(1 - \frac{6,6}{100}\right)^n \qquad | : 19\,500\,€$

$0,5 = 0,934^n$

$n = \frac{\log 0,5}{\log 0,934} \approx 10$ Jahre (Zeitspanne, um noch die Hälfte des Kaufpreises zu erhalten)

$$\boxed{\begin{array}{l} W_n = W_0 \cdot q^n \\ q = 1 - \frac{p}{100} \end{array}}$$

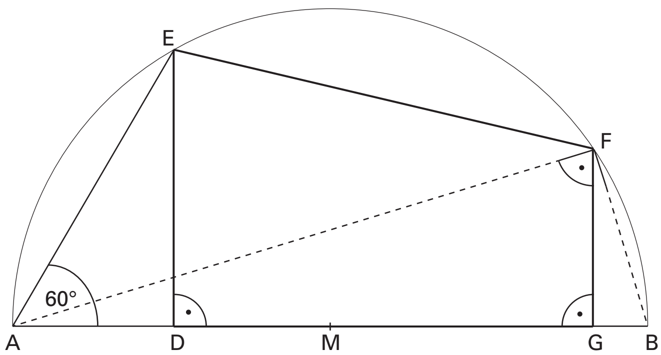
q = Wachstumsfaktor

n = Anzahl der Beobachtungszeiträume (Jahre)

$$\boxed{\begin{array}{l} a^x = b \\ x = \log_a b \end{array}}$$

$$\boxed{\log_a b = \log b : \log a}$$

Aufgabe 4



$\overline{AE} = 8$ cm
$\overline{DG} = 11$ cm
$\overline{BG} = 1$ cm

a) Berechnung von $\overline{DE}$:

$$\sin 60° = \frac{\overline{DE}}{\overline{AE}} \qquad | \cdot \overline{AE}$$

$$\overline{DE} = \sin 60° \cdot \overline{AE}$$

$$\overline{DE} = \sin 60° \cdot 8\text{ cm} \approx 6{,}9\text{ cm}$$

$$\boxed{\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

Länge der Strecke $\overline{AD}$:

$$\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 - \overline{DE}^2$$

$$\overline{AD}^2 = (8\text{ cm})^2 - (6{,}9\text{ cm})^2 \qquad | \sqrt{}$$

$$\overline{AD} \approx 4\text{ cm}$$

Pythagoras:

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$$

oder:

$$\cos 60° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AE}} \qquad | \cdot \overline{AE}$$

$$\overline{AD} = \cos 60° \cdot 8\text{ cm} = 4\text{ cm}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}}$$

Länge der Strecke $\overline{AG}$:

$$\overline{AG} = \overline{AD} + \overline{DG} = 4\text{ cm} + 11\text{ cm} = 15\text{ cm}$$

Berechnung von $\overline{FG}$:

$$\overline{FG}^2 = \overline{AG} \cdot \overline{GB}$$

$$\overline{FG}^2 = 15\text{ cm} \cdot 1\text{ cm} \qquad | \sqrt{}$$

$$\overline{FG} = \sqrt{15\text{ cm}^2} \approx 3{,}9\text{ cm}$$

Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck:

$$\boxed{h^2 = p \cdot q}$$

Fläche des Trapezes DGFE:

$$A_{Tr.} = \frac{\overline{DE} + \overline{FG}}{2} \cdot \overline{DG}$$

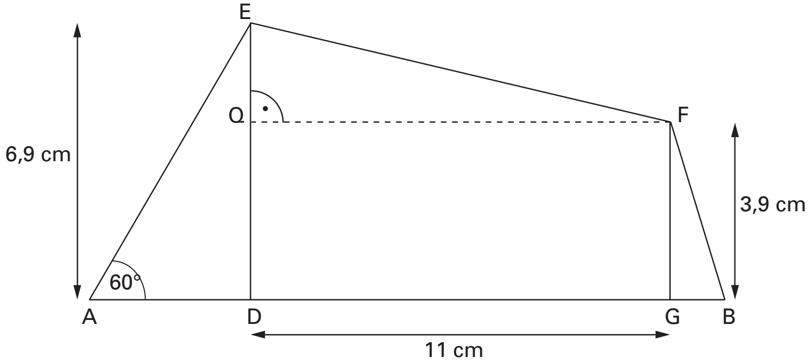
$$A_{Tr.} = \frac{6{,}9\text{ cm} + 3{,}9\text{ cm}}{2} \cdot 11\text{ cm}$$

$$A_{Tr.} = 59{,}4\text{ cm}^2$$

$$\boxed{A_{Tr.} = \frac{a + c}{2} \cdot h}$$

Prüfungen

b)



Zur Berechnung des Umfangs des Trapezes DGFE muss noch die Strecke $\overline{EF}$ bestimmt werden.
Dazu zeichnet man den Hilfspunkt Q auf $\overline{DE}$ ein und verbindet diesen mit F.
$\Rightarrow$ rechtwinkliges Δ EQF
$\overline{QF} = \overline{DG}$ und $\overline{QF} \parallel \overline{DG}$

Berechnung von $\overline{EQ}$:

$\overline{EQ} = \overline{ED} - \overline{FG} = 6{,}9\text{ cm} - 3{,}9\text{ cm} = 3\text{ cm}$

Berechnung von $\overline{EF}$ mithilfe des Satzes von Pythagoras:

$\overline{EF}^2 = \overline{EQ}^2 + \overline{QF}^2$

$\overline{EF}^2 = (3\text{ cm})^2 + (11\text{ cm})^2 \quad | \sqrt{}$

$\overline{EF} = \sqrt{130\text{ cm}^2} \approx 11{,}4\text{ cm}$

$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

Umfang des Trapezes:

$U_{Tr.} = \overline{DG} + \overline{GF} + \overline{FE} + \overline{ED}$

$U_{Tr.} = 11\text{ cm} + 3{,}9\text{ cm} + 11{,}4\text{ cm} + 6{,}9\text{ cm}$

$U_{Tr.} = 33{,}2\text{ cm}$

Aufgabe 5

a) S_1 (-1 | -6)
Scheitelpunktgleichung:
$y = (x - (-1))^2 - 6$
$y = (x + 1)^2 - 6$
$y = x^2 + 2x + 1 - 6$

p_1: $y = x^2 + 2x - 5$

$\boxed{y = (x - p)^2 + q}$

b) p_2: $y = -x^2 - 6x - 5$

$\Rightarrow$ Nullstellen ($y = 0$)

$$0 = -x^2 - 6x - 5 \quad | + x^2 + 6x$$
$$x^2 + 6x = -5$$
$$x^2 + 6x + 3^2 = -5 + 3^2 \quad \text{(quadratische Ergänzung)}$$
$$(x + 3)^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$$
$$x + 3 = \pm 2 \quad | - 3$$
$$x_1 = 2 - 3 = -1$$
$$x_2 = -2 - 3 = -5$$

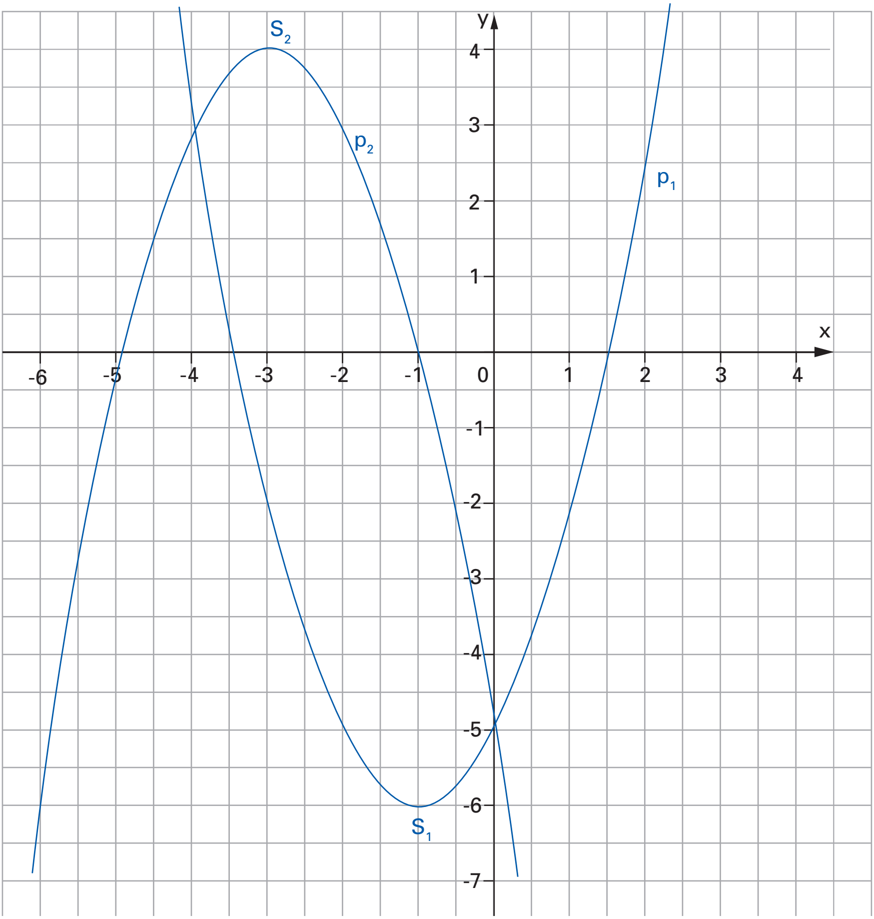
$\Rightarrow$ N_1 (-1 | 0); N_2 (-5 | 0)

c) Bestimmung des Scheitelpunkts der Parabel:

$$p_2: \ y = -x^2 - 6x - 5 \quad | \text{ (-1) ausklammern}$$
$$y = -(x^2 + 6x + 5) \quad | \text{ quadratische Ergänzung in der Klammer}$$
$$y = -(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2 + 5)$$
$$y = -((x + 3)^2 - 4)$$
$$y = -(x + 3)^2 + 4$$

$\Rightarrow$ S_2 (-3 | 4)

d)



e) Funktionsgleichung von p_3 mit D (-1 | 2) und E (6 | -5)

(I) Einsetzen der Koordinaten von D:

$2 = (-1)^2 + p \cdot (-1) + q$

$2 = 1 - p + q \qquad | -1 + p$

$q = 1 + p$

$\boxed{y = x^2 + p \cdot x + q}$

(II) Einsetzen der Koordinaten von E:

$-5 = 6^2 + 6p + q$

I in II: $-5 = 36 + 6p + 1 + p$

$-42 = 7p \qquad | :7$

$-6 = p \qquad \Rightarrow q = 1 - 6 = -5$

$\Rightarrow$ p_3: $y = x^2 - 6x - 5$

f) $3y + 2x^2 = -(-36 + 24 + x^2)$

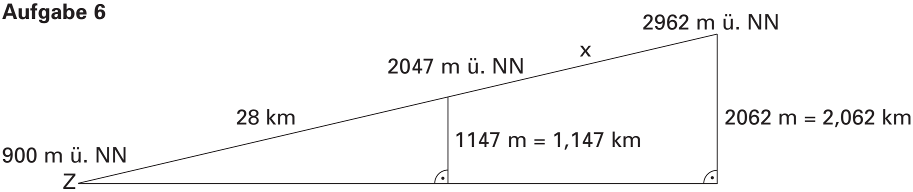
$3y + 2x^2 = 36x - 24 - x^2 \quad | -2x^2$

$3y = -3x^2 + 36x - 24 \quad | :3$

$y = -x^2 + 12x - 8$

$\Rightarrow$ Vor dem quadratischen Glied ist ein negativer Faktor, d. h., dass die Parabel nach unten geöffnet ist.

Aufgabe 6



a) $\dfrac{28\text{ km} + x}{2{,}062\text{ km}} = \dfrac{28\text{ km}}{1{,}147\text{ km}} \quad | \cdot 2{,}062\text{ km}$

2. Strahlensatz

$28\text{ km} + x = \dfrac{28\text{ km}}{1{,}147\text{ km}} \cdot 2{,}062\text{ km} \quad | -28\text{ km}$

$x = \dfrac{28\text{ km}}{1{,}147\text{ km}} \cdot 2{,}062\text{ km} - 28\text{ km}$

$x \approx 22\text{ km}$

b) Streckungsfaktor k:

Höhe des Zugspitzdreiecks:
2962 m – 900 m = 2062 m

Höhe des Säulingdreiecks:
2047 m – 900 m = 1147 m

$2062\text{ m} = k \cdot 1147\text{ m} \quad | : 1147\text{ m}$

$k = \dfrac{2062\text{ m}}{1147\text{ m}} \approx 1{,}8$

Zentrische Streckung:

$\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$

Aufgabe 7

■ – $120x^4y^3$ + ◆ = (● – ★)^2

Überlegung: $120x^4y^3 = 2ab$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$

Mögliche Lösungen:

- $3600x^8 - 120x^4y^3 + y^6 = (60x^4 - y^3)^2$
- $36x^8y^6 - 120x^4y^3 + 100 = (6x^4y^3 - 10)^2$
- $100x^8 - 120x^4y^3 + 36y^6 = (10x^4 - 6y^3)^2$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

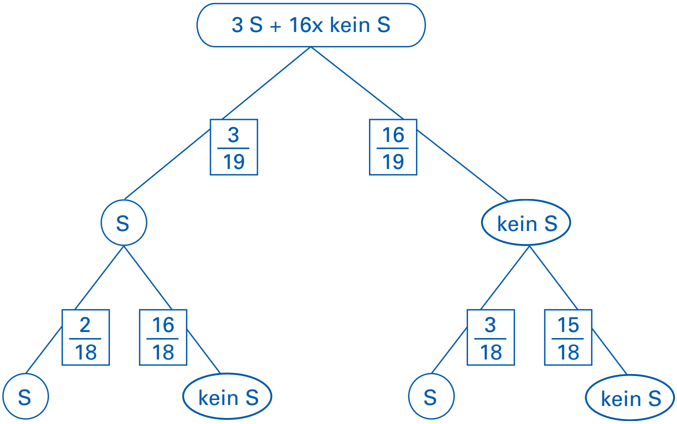
Aufgabe 8

a) Wahrscheinlichkeit für ein N:

$P(N) = \frac{2}{19}$ (auf 2 Karten von 19 Karten steht ein N)

$P(N) = 0{,}105 \approx 10{,}5\%$

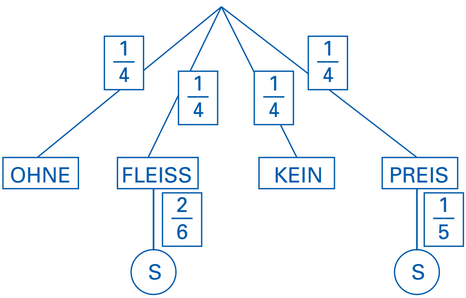
b)



Wahrscheinlichkeit für mindestens 1 S:

$P(\text{mind. } 1\ S) = \frac{3}{19} + \frac{16}{19} \cdot \frac{3}{18} = \frac{54}{342} + \frac{48}{342} = \frac{102}{342} \approx 0{,}3$

c)



$P(S) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$

d) Anzahl der Reihenfolgen:
$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Aufgabe 9

$$\frac{x^2 \cdot x \cdot (x^2)^{-3}}{x^{-6} \cdot x^2} + \frac{\sqrt[2]{x^4}}{(x^{0,5})^4} =$$

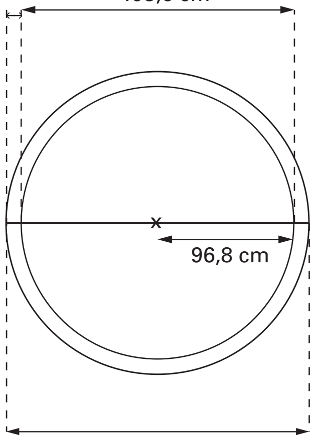
$$x^2 \cdot x \cdot x^{-6} \cdot x^6 \cdot x^{-2} + x^{\frac{4}{2}} \cdot x^{-2} =$$

$$x + x^0 = x + 1$$

Potenzgesetze:

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
$a^0 = 1$

Aufgabe 10



a) Berechnung der Oberfläche:

$O = (2\ m)^2 \cdot \pi$
$O = 4\ m^2 \cdot 3,14 = 12,56\ m^2$

$O_{Kugel} = 4 \cdot r^2 \cdot \pi$
$= d^2 \cdot \pi$

b) Berechnung der Kugelmasse:

Volumen der äußeren Kugel:
$V_ä = \frac{1}{6} \cdot (2\ m)^3 \cdot 3,14 \approx 4,19\ m^3$

Volumen der inneren Kugel:
$V_i = \frac{1}{6} \cdot (1,936\ m)^3 \cdot 3,14 \approx 3,8\ m^3$

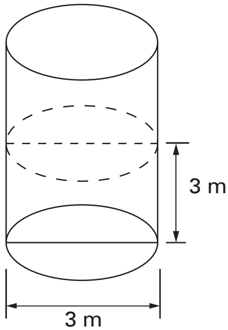
Volumen der Hohlkugel:
$V_H = V_ä - V_i = 4,19\ m^3 - 3,8\ m^3 = 0,39\ m^3$

Masse der Hohlkugel:
$m = 0,39\ m^3 \cdot 7870\ kg$
$m = 3069,3\ kg = 3,0693\ t \approx 3,07\ t$

$V_{Kugel} = \frac{4}{3} r^3 \pi$
$= \frac{1}{6} d^3 \pi$

$m = V \cdot D$

c)



Volumen der äußeren Kugel:
$V_ä = 4{,}19\ m^3$

$\boxed{V_Z = r^2\pi \cdot h}$

Wasservolumen im Zylinder:
$V_W = (1{,}5\ m)^2 + 3{,}14 \cdot 3\ m \approx 21{,}2\ m^3$

Gesamtvolumen:
$V_{Ges.} = V_ä + V_W = 4{,}19\ m^3 + 21{,}2\ m^3$
$V_{Ges.} = 25{,}39\ m^3$

Mindesthöhe des Tauchbeckens:
$25{,}39\ m^3 = (1{,}5\ m)^2 \cdot 3{,}14 \cdot h \qquad | : (1{,}5\ m)^2 \qquad | : 3{,}14$
$h = 25{,}39\ m^3 : 2{,}25\ m^3 : 3{,}14$
$h \approx 3{,}593\ m$

$\Rightarrow\ h_{Mindesth} = 3{,}6\ m$